Corrigé (S Antilles-Guyane 18 juin 2019)

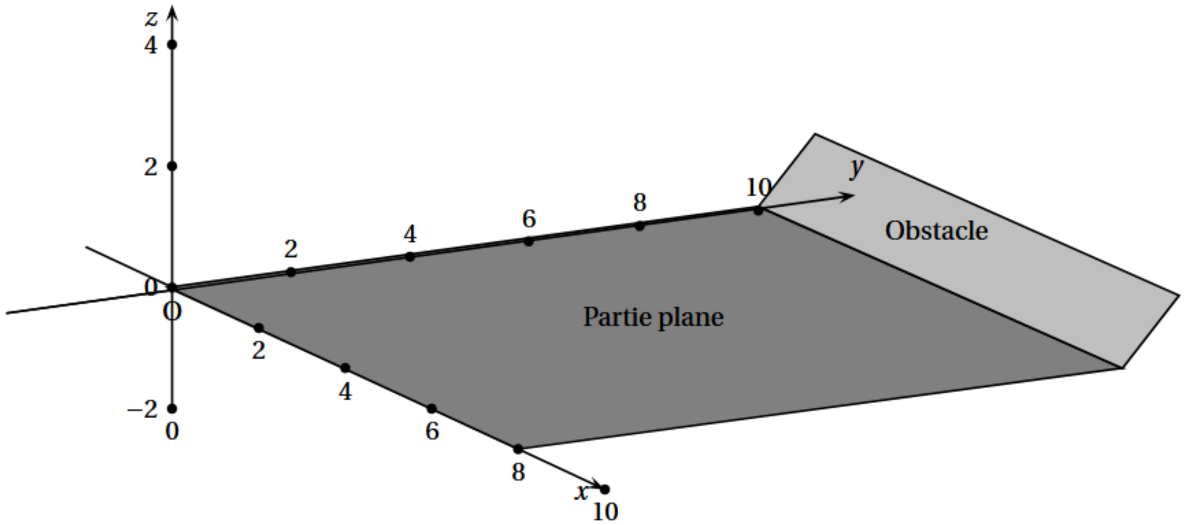
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$O(0 ; 0 ; 0),\ P(0 ; 10 ; 0),\ Q(0 ; 11 ; 1),\ T(10 ; 11 ; 1),\ U(10 ; 10 ; 0) \text{ et } V(10 ; 0 ; 0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2; 4; 0,25) et B(2; 6; 0,75);
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4; 6; 0,25) et D(2; 6; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(0 ; 2 ; 0,5)$. Cette droite passe par A par exemple. On trouve ainsi une représentation paramétrique de (AB) donnée, pour t réel, par

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases}$$

2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).

$\overrightarrow{PQ}(0 ; 1 ; 1)$ et $\overrightarrow{PU}(10 ; 0 ; 0)$ ne sont pas colinéaires, et on a

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$

$$\overrightarrow{PU} \cdot \vec{n} = 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU), donc $\vec{n}$ est normal au plan (PQU).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

$\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQU) donc ce plan admet une équation du type $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$, c'est-à-dire du type $y - z + d = 0$ avec d à déterminer.
Or, $P(0\ ;\ 10\ ;\ 0)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $10 - 0 + d = 0 \iff d = -10$.. Ainsi, une équation cartésienne de (PQU) est

$$y - z - 10 = 0.$$

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\ ;\ \dfrac{37}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$.

(AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(0;2;0.5)$ et le plan (PQU) de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, ce qui est le cas ici. Ils sont donc sécants en un point $I(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
Par ailleurs, un point $I(x; y; z)$ appartient à l'intersection de la droite (AB) et du plan (PQU) si et seulement si il satisfait l'équation paramétrique de (AB) et l'équation cartésienne de (PQU) si et seulement si

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ y - z - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ 4 + 2t - (0,25 + 0,5t) - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ 1,5t - 6,25 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = \frac{7}{3} \\ t = \frac{25}{6} \end{cases}$$

Ainsi, la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\ ;\ \dfrac{37}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Les points se situant sur l'obstacle PQTU ont une cote comprise entre 0 et 1. Or, le point I, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, a une cote de $\dfrac{7}{3} > 2$, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU. Ainsi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\text{AM}} = a\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CN}} = b\overrightarrow{\text{CD}}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2 - 2b\ ;\ 2 - 2a\ ;\ -0,5a)$.

Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ &= -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD} \\ &= -a(0\ ;\ 2\ ;\ 0,5) + (2\ ;\ 2\ ;\ 0) + b(-2\ ;\ 0\ ;\ 0) \\ &= (2 - 2b\ ;\ 2 - 2a\ ;\ -0,5a) \end{aligned}$$

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

D'après ce qui est dit dans l'énoncé, la distance MN est minimale si et seulement si (MN) et (AB) sont perpendiculaires **et** (MN) et (CD) sont perpendiculaires. Ceci équivaut à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux **et** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux, ce qui équivaut encore à $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ **et** $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} 2(2-2a) - 0,5 \times 0,5a = 0 \\ -2(2-2b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 4,25a = 0 \\ 2 - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{4}{4,25} = \frac{16}{17} \\ b = 1 \end{cases}$$

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

La distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$, et on a donc $\overrightarrow{MN}\left(0; \frac{2}{17}, \frac{-8}{17}\right)$. Ainsi, la distance minimale MN est donnée par

$$MN = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(\frac{-8}{17}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

Or $\frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0,485071$.

L'unité étant égale à 1 décamètre la distance minimale est donc environ $4,85 > 4$: la consigne est respectée.